



TITLE:

# ユニタリ群上の保型形式へのある種のGalois actionについて (保型形式と $L$ -関数の研究)

AUTHOR(S):

山内, 淳生

---

CITATION:

山内, 淳生. ユニタリ群上の保型形式へのある種のGalois actionについて (保型形式と $L$ -関数の研究). 数理解析研究所講究録 1999, 1103: 111-122

ISSUE DATE:

1999-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/63198>

RIGHT:

ユニタリ群上の保型形式への

ある種の Galois action について

京大・理 山内 淳生 (Atsuo Yamauchi)

## 0. Introduction

symplectic 群上の正則保型形式は、Fourier 展開を持つ。

例えば、最も簡単な、上半平面  $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  上の elliptic modular form  $f$  の場合は、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \exp(2\pi\sqrt{-1}\left(\frac{n}{N}\right)z)$$

という形になる。この場合、 $C_n$  の値により  $f$  の算術性を定義でき、また任意の  $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$  について、

$$f^{\sigma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\sigma} \exp(2\pi\sqrt{-1}\left(\frac{n}{N}\right)z)$$

なる正則保型形式  $f^{\sigma}$  の存在 (つまり、ある種の Galois action) も知られている。

これを、任意の CM 体  $K$  上の 3 次 unitary 群 (3 次でなくとも各無限素点での signature がすべて等しければ可能だが、ここでは省略) 上の保型形式の Fourier-Jacobi 展開で以下、考えてみることにする。なお、 $K$  が虚 2 次体の場合には [3]

に、 $K$  上 trivial な Galois action の存在について触れられているが、証明は述べられていない。

### 1. 3 次 unitary 群上の保型形式とその算術性

$F$  を有限次総実代数体、 $K$  を  $F$  の CM 拡大 (i.e.  $F$  の総虚な 2 次拡大) 体とする。このとき、 $\text{Gal}(K/F)$  の生成元を  $\rho$  とすると、 $\rho$  は ( $K$  のあらゆる  $\mathbb{C}$  への埋め込みにおいて) 複素共役となる。そこで 3 次 unitary similitude 群  $G$  を、

$$G(\mathbb{Q}) = \left\{ g \in \text{GL}(3, K) \mid {}^t g^{\rho} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} g = \nu(g) \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \right\}, \quad \nu(g) \in F^{\times}$$

とする。但し、 $\lambda \in K^{\times}$  で  $\lambda^{\rho} = -\lambda$  とする。 $\lambda$  の虚部をすべて正にするような  $K$  の CM-type  $\Phi$  ( $K$  の  $\mathbb{C}$  への埋め込みの集合で、それぞれの  $F$  への制限が  $F$  の無限素点を重複なくすべて尽しているもの) をとり、以後、区別の必要な場合は  $G$  を  $G(\lambda, \Phi)$  と書く。 $F$  の (あるいは  $K$  の) 全ての無限素点の集合を  $\mathfrak{a}$  とし、 $\mathfrak{b} \in F$  について、 $v \in \mathfrak{a}$  により  $\mathbb{R}$  へ埋め込んだ像を  $\mathfrak{b}_v$  と書く。また、 $\Phi$  を  $K$  から  $\mathbb{C}^{\mathfrak{a}}$  への dense な埋め込みとみなす ( $\mathfrak{b} \mapsto \mathfrak{b}^{\Phi} = (\mathfrak{b}_v^{\Phi})_{v \in \mathfrak{a}}$  但し、 $\Phi_v$  は  $\Phi$  の元で  $F$  への制限が  $v$  となるもの)。このとき、 $G(\lambda, \Phi)(\mathbb{Q})$  の作用する対称領域  $D(\lambda, \Phi)$  は、

$$D(\lambda, \Phi) = \prod_{v \in \mathbb{A}} D(\lambda, \Phi)_v$$

$$\text{但し、 } D(\lambda, \Phi)_v = \left\{ z_v = \begin{pmatrix} z_v \\ w_v \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid \sqrt{-1} (\bar{z}_v - z_v + \lambda^{\frac{p_v}{2}} w_v \bar{w}_v) > 0 \right\}$$

となっている。ここに、 $G(\lambda, \Phi)(\mathbb{Q})$  は

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \quad \alpha \left( \begin{pmatrix} z_v \\ w_v \end{pmatrix}_{v \in \mathbb{A}} \right) = \left( \begin{pmatrix} (\alpha_{11}^{\frac{p_v}{2}} z_v + \alpha_{12}^{\frac{p_v}{2}} w_v + \alpha_{13}^{\frac{p_v}{2}}) (\alpha_{31}^{\frac{p_v}{2}} z_v + \alpha_{32}^{\frac{p_v}{2}} w_v + \alpha_{33}^{\frac{p_v}{2}})^{-1} \\ (\alpha_{21}^{\frac{p_v}{2}} z_v + \alpha_{22}^{\frac{p_v}{2}} w_v + \alpha_{23}^{\frac{p_v}{2}}) (\alpha_{31}^{\frac{p_v}{2}} z_v + \alpha_{32}^{\frac{p_v}{2}} w_v + \alpha_{33}^{\frac{p_v}{2}})^{-1} \end{pmatrix}_{v \in \mathbb{A}} \right)$$

で作用し、 $\zeta$  の automorphic factor は、

$$\mu_v(\alpha, \zeta) = \alpha_{31}^{\frac{p_v}{2}} z_v + \alpha_{32}^{\frac{p_v}{2}} w_v + \alpha_{33}^{\frac{p_v}{2}} \quad \zeta = (\zeta_v)_{v \in \mathbb{A}} = \left( \begin{pmatrix} z_v \\ w_v \end{pmatrix}_{v \in \mathbb{A}} \right)$$

である。

従って、 $D(\lambda, \Phi)$  上の函数  $f$  に対して、重さ  $k$  ( $k = (k_v)_{v \in \mathbb{A}}$ ,  $k_v \in \mathbb{Z}$ ) の  $\alpha (\in G(\lambda, \Phi)(\mathbb{Q}))$  の作用が、

$$(f|_k \alpha)(\zeta) = f(\alpha(\zeta)) \prod_{v \in \mathbb{A}} \mu_v(\alpha, \zeta)^{-k_v}$$

で定まる。そこで、正則保型形式の空間  $M_k(\Gamma)$  ( $\Gamma$  は  $G(\lambda, \Phi)(\mathbb{Q})$  の congruence subgroup) を、

$$M_k(\Gamma) = \{ f: D(\lambda, \Phi) \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphic} \mid f|_k \alpha = f \quad \forall \alpha \in \Gamma \}$$

で定義することができる。以降、 $\Gamma$  を特定せず  $M_k (= \bigcup M_k(\Gamma))$  という書き方をすることもある。また、有理型保型形式の空間  $A_k$  を、

$$A_k = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} \{ f_1 f_2^{-1} \mid f_1 \in M_{k+l}, 0 \neq f_2 \in M_k \}$$

で定める。

さて、この場合の  $M_k$  の算術性について考える。まず、

$f \in M_k$  は、次のような Fourier-Jacobi 展開  $\left( \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$  という

parabolic subgroup による) を持つことが分かる。

$$f(z) = \sum_r g_r(w) \exp(2\pi\sqrt{-1} \sum_{v \in \mathbb{A}} r_v z_v) \quad z = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_v \\ w_v \end{pmatrix}_{v \in \mathbb{A}}.$$

( $r$  は  $F$  のある lattice のうち、総正な部分を動く。) また、

$$H(\mathbb{Q}) = \left\{ h = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G(\mathbb{A}, F)(\mathbb{Q}) \right\}$$

という unipotent を考える。この  $H(\mathbb{Q})$  による作用で、 $g_r$  は次のような条件を満たす theta 函数であることが分かる。

$$\mathcal{J}(r_2, F, L) = \left\{ g: \mathbb{C}^{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphic} \left| \begin{array}{l} g(w+x^{\sharp}) = g(w) \exp(2\pi\sqrt{-1} \left( -\sum_{v \in \mathbb{A}} \left\{ r_2 x_v^{\sharp} + \frac{1}{2} r_2 x x^{\sharp} \right\}^{\sharp_v} \right) \right) \right. \\ \left. \forall x \in L \right. \end{array} \right\}.$$

( $L$  は  $k$  のある lattice)

以下、 $L$  を特定せず  $\mathcal{J}(r_2, F) = \bigcup_L \mathcal{J}(r_2, F, L)$  とする。[2] で

は、この theta 函数の空間に算術性が定義されている。 $(k^*, F^*)$  を  $(k, F)$  の reflex とし、 $k^*$  の最大 abel 拡大を  $k_{ab}^*$  とする。この時、 $g \in \mathcal{J}(r_2, F)$  について、 $\mathbb{C}^{\mathbb{A}}$  上の函数  $g_*$  を、

$$g_*(w) = \exp(\pi\sqrt{-1} \sum_{v \in \mathbb{A}} (r_2)^{\sharp_v} w_v \overline{w_v}) g(w) \quad w = (w_v)_{v \in \mathbb{A}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$$

と定義し、 $k_{ab}^*$  を含む任意の ( $\mathbb{C}$  の部分) 体  $\Omega$  について、

$$\mathcal{J}(r_2, F, \Omega) = \{ g \in \mathcal{J}(r_2, F) \mid g_*(w) \in \Omega, \quad \forall w \in k^{\sharp} \}$$

と定める (つまり、 $\mathbb{Q} \times \text{lattice}$  という点での値で定義する)。

ここで、 $M_k(\Omega)$  を、 $f \in M_k$  のうち、各 Fourier-Jacobi 係数の  $g_r \in \mathcal{J}(r_2, F, \Omega)$  なるものとする。また、有理型の場合には、

$$A_k(\Omega) = \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}^{\mathbb{A}}} \{ f_1 f_2^{-1} \mid f_1 \in M_{k+\ell}(\Omega), \quad 0 \neq f_2 \in M_{\ell}(\Omega) \}$$

と定める。

さて、[2] では、

$$\mathcal{J}(r_2, \mathbb{F}, \Omega) = \mathcal{J}(r_2, \mathbb{F}, k_{\text{ad}}^*) \otimes_{k_{\text{ad}}^*} \Omega$$

となることが示されている。また、 $g \in \mathcal{J}(r_2, \mathbb{F}, L)$  について、 $g_*$  は

$$g_*(w+x^{\mathbb{F}}) = \exp(2\pi\sqrt{-1} \sum_{v \in \mathfrak{a}} \text{Re}((r_2 x^{\mathbb{P}})^{\mathbb{F}} \overline{w}_v)) g_*(w) \quad \forall x \in L$$

という条件を満たすので、 $k$  の任意の lattice  $M$  について、 $M$  の (十分小さな) sublattice  $M'$  が存在して、

$$g_*(x^{\mathbb{F}} + y^{\mathbb{F}}) = g_*(x^{\mathbb{F}}) \quad \forall x \in M, \forall y \in M'$$

が成り立つ。(注:  $g_*$  は周期函数ではない。)従って、近似により、 $g_*$  は  $k_A$  ( $k$  の adèle ring) 上定義されていると思ってもよい。つまり、 $g_*(\mathfrak{c}^{\mathbb{F}})$  ( $\mathfrak{c} \in k_A$ ) というものの値を定義することができる。

[2] の主定理をこの場合に合わせて少し変形して、theta 函数の空間への Galois action を与える次の定理を得る。

Theorem 1.1 次のような群を考える (但し、 $[\cdot, \cdot]$  は Artin symbol)。

$$\Phi(\mathbb{C}) = \{(a, \sigma) \in k_A^{* \times} \times \text{Aut}(\mathbb{C}/k^*) \mid \sigma|_{k_{\text{ad}}^*} = [a, k^*]\}$$

この時、 $g \in \mathcal{J}(r_2, \mathbb{F})$  と  $(a, \sigma) \in \Phi(\mathbb{C})$  について、 $g^{(a, \sigma)} \in \mathcal{J}(N(\mathfrak{a})r_2, \mathbb{F})$  ( $N(\mathfrak{a})$  は  $k^*$  の ideal  $(a)$  の absolute norm) が存在し、

$$(g^{(a, \sigma)})_*(y^{\mathbb{F}}) = \{g_*(N_{\mathbb{F}'}(\mathfrak{a})y)^{\mathbb{F}}\}^{\sigma} \quad \forall y \in k$$

が成り立つ ( $N_{\mathbb{F}'}$  は  $k_A^{* \times} \rightarrow k_A^*$  の reflex norm)。

この作用を正則保型形式  $f$  の各係数  $a_i$  に施したものが実は正則保型形式となっていることを後で述べる。

## 2. 埋め込み

前節で定義した  $G(\mathbb{A}, F)$  上の保型形式の算術性について考えるため、以下のような埋め込みを考える。

まず、 $SL(2, F)$  と  $\chi$  の作用する Hilbert 上半空間  $\mathcal{H}^{\mathbb{A}}$  を考える。但し、

$$\mathcal{H}^{\mathbb{A}} = \{ z = (z_v)_{v \in \mathbb{A}} \mid z_v \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z_v) > 0 \quad \forall v \in \mathbb{A} \}$$

である。そして  $SL(2, F)$  と  $\mathcal{H}^{\mathbb{A}}$  の  $G(\mathbb{A}, F)(\mathbb{Q})$  と  $D(\mathbb{A}, F)$  への埋め込み

$$I_0: SL(2, F) \hookrightarrow G(\mathbb{A}, F)(\mathbb{Q}) \quad I_0\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_0: \mathcal{H}^{\mathbb{A}} \hookrightarrow D(\mathbb{A}, F) \quad \varepsilon_0((z_v)_{v \in \mathbb{A}}) = \begin{pmatrix} z_v \\ 0 \end{pmatrix}_{v \in \mathbb{A}}$$

を定義する。この時、この2つの埋め込みは、群の作用と可換である。即ち、

$$\varepsilon_0(\alpha(z)) = I_0(\alpha)(\varepsilon_0(z)), \quad \forall z \in \mathcal{H}^{\mathbb{A}}, \quad \forall \alpha \in SL(2, F)$$

が成り立つ。従って、 $D(\mathbb{A}, F)$  上の保型形式の引き戻しを考えることができる。 $\mathcal{H}^{\mathbb{A}}$  上の重さ  $k$  ( $k \in \mathbb{Z}^{\mathbb{A}}$ ) の保型形式の空間を  $M_k^H$  とするとき、 $f \in M_k$  ならば  $f \circ \varepsilon_0 \in M_k^H$  である。

この埋め込み（あるいは引き戻し）と算術性との関係を考

えてみる。まず、 $M_k^H$  に算術性を、( $\Omega$  は  $\mathbb{C}$  の任意の部分体)

$$M_k^H(\Omega) = \left\{ f((z_v)_{v \in \alpha}) = \sum_r C_r \exp(2\pi\sqrt{-1} \sum_{v \in \alpha} r_v z_v) \mid C_r \in \Omega, \forall r \in F \right\}$$

( $r$  は  $F$  のある lattice のうち、総正の部分を動く。)

と、Fourier 係数により入れる。また、

$$A_k^H(\Omega) = \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}^n} \{ f_1 f_2^{-1} \mid f_1 \in M_{k+\ell}^H(\Omega), 0 \neq f_2 \in M_\ell^H(\Omega) \}$$

と有理型の場合についても定める。ここで、 $f \in M_k$  と、

$$h_\ell = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \ell^p & \frac{1}{2} \alpha \ell \ell^p \\ 0 & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\ell \in k) \quad \text{について、} f|_k h_\ell \quad \text{と} \quad \varepsilon_0$$

による引き戻しを考えると、

$$(f|_k h_\ell) \circ \varepsilon_0((z_v)_{v \in \alpha}) = \sum_r (g_r)_*(\ell^{\frac{1}{2}}) \exp(2\pi\sqrt{-1} \sum_{v \in \alpha} r_v z_v)$$

$$\left( \text{但し、} f(z) = \sum_r g_r(w) \exp(2\pi\sqrt{-1} \sum_{v \in \alpha} r_v z_v) \right)$$

となることが、計算により確かめられる。従って、次の定理が成り立つ。

Theorem 2.1  $k_{\alpha\ell}^*$  を含む  $\mathbb{C}$  の任意の部分体  $\Omega$  に対して、

$$f \in M_k(\Omega), \quad h \in H(\mathbb{Q}) \quad \text{ならば、} \quad (f|_k h) \circ \varepsilon_0 \in M_k^H(\Omega).$$

### 3. canonical model と算術性

さて、[1] では、unitary 群の場合の対称領域の congruence subgroup の商の、canonical model が構成されている。



この canonical model の意味で算術的な保型函数の体 ([1] では  $\mathcal{K}_0$  と書かれている) を  $\mathcal{K}$  とおく。この  $\mathcal{K}$  は、各 model  $V_f$  上  $K_{\text{alg}}^*$ -rational な有理函数 (全体ではない) からなる体である。この  $\mathcal{K}$  の元は、 $A_0$  でみた時、どの程度の算術性についての性質を持っているかを次の定理で述べる。

Theorem 3.1  $K_{\text{alg}}^*$  を含む任意の  $\mathbb{C}$  の部分体  $\Omega$  について、

$$A_0(\Omega) = \mathcal{K} \vee \Omega \quad \text{が成り立つ。}$$

(右辺は  $\mathcal{K}$  と定数函数の体  $\Omega$  の合成体を意味する。)

### 証明の概略

前節の埋め込み  $\varepsilon_0$  を使う。まず、

$$W = \{ z \in D(1, \frac{1}{2}) \mid z = c^{\frac{1}{2}}, \quad c \in K^2 \}$$

とおく。この  $W$  はある種の固定点 (いわゆる CM-point) の集合で、 $\mathcal{K}$  の各元は  $W$  の各点で (正則ならば)  $K_{\text{alg}}^*$  に値をとることが知られている。また、

$$W^H = \{ z \in \mathcal{H}^{\text{an}} \mid z = c^{\frac{1}{2}}, \quad c \in K \}$$

とおく。このとき、同じく  $A_0^H(\mathbb{Q}_{\text{alg}})$  の元は  $W^H$  で  $K_{\text{alg}}^*$  に値を持つことが知られている。さらに、

$$W = H(\mathbb{Q})(\varepsilon_0(W^H))$$

と表わしている。従って、 $f \in A_0(\Omega)$  について、Theorem 2.1 より、 $f \circ h \circ \varepsilon_0 \in A_0^H(\Omega)$  (もし定義されていれば) が分かり、

$f$  は  $W$  の各点で (もし正則ならば)  $\Omega$  に値をとることが分かる。従って、 $A_0(\mathbb{C}) = \mathcal{R}V\mathbb{C}$  より、 $f \in \mathcal{R}V\Omega$  が導かれる。つまり、 $A_0(\Omega) \subset \mathcal{R}V\Omega$  , 逆も同様に  $W$  での値を考えて、 $\Sigma_0$  での引き戻しを考えることで証明される。

#### 4. ある種の Galois action

1 節で定義した  $\mathfrak{H}(\mathbb{C})$  の theta 函数への作用を、保型形式の Fourier-Jacobi 係数に作用させることを考える。

##### Theorem 4.1

$f \in M_k$  で、その Fourier-Jacobi 展開を

$$f(z) = \sum_r g_r(w) \exp(2\pi\sqrt{-1} \sum_{v \in \mathfrak{a}} r_v z_v)$$

とする。任意の  $(a, \sigma) \in \mathfrak{H}(\mathbb{C})$  について、 $f^{(a, \sigma)} \in M_{k^\sigma}$  ( $k = (k_v)_{v \in \mathfrak{a}}$  とするとき、 $k^\sigma = (k_{v\sigma^{-1}})_{v \in \mathfrak{a}}$ ) が存在し、その Fourier-Jacobi 展開は、

$$f^{(a, \sigma)}(z) = \sum_r g_r^{(a, \sigma)}(w) \exp(2\pi\sqrt{-1} \sum_{v \in \mathfrak{a}} N(a) r_v z_v)$$

となる。

(証明略)

Remark: この  $(a, \sigma)$  の作用を  $A_k \wedge$  と拡張したものは、 $\mathbb{A}$  の元へは canonical model の意味での  $\begin{pmatrix} N_{\mathbb{F}'(a)} & \\ & N_{k^*/\mathbb{Q}}(a) \end{pmatrix}^{-1}$  の作用 (で、当然定数関数へは  $\sigma$  で作用) となっている。

この remark を使うと、次のような拡張された Galois 群と、その作用を得る。(  $G_A$  は  $G$  の adèle 化 )

$$G = \left\{ (x, a, \sigma) \in G_A \times k_A^{*\times} \times \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/k^*) \left| \begin{array}{l} \det(x) N_{\mathbb{F}'(a)} N_{k^*/\mathbb{Q}}(a) \in K^{\times} K_{\infty}^{\times} \\ L(x) N_{k^*/\mathbb{Q}}(a) \in F^{\times} F_{\infty+}^{\times} \\ \sigma|_{k_{\text{al}}^*} = [a, k^*] \end{array} \right. \right\}$$

Theorem 4.2.  $G$  は次のように  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^{\times}} A_k(\overline{\mathbb{Q}})$  に作用している。

$$(i) (b_1 f_1 + b_2 f_2)^{(x, a, \sigma)} = b_1^{\sigma} f_1^{(x, a, \sigma)} + b_2^{\sigma} f_2^{(x, a, \sigma)}$$

$$\text{if } f_1, f_2 \in A_k(\overline{\mathbb{Q}}), \quad b_1, b_2 \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

$$(ii) (f_1 f_2)^{(x, a, \sigma)} = f_1^{(x, a, \sigma)} f_2^{(x, a, \sigma)}.$$

$$(iii) (f(x_1, a_1, \sigma_1))^{(x_2, a_2, \sigma_2)} = f(x_1 x_2, a_1 a_2, \sigma_1 \sigma_2).$$

$$(iv) f^{(\alpha, 1, 1)} = f|_k \alpha \quad \text{if } f \in A_k(\overline{\mathbb{Q}}), \quad \alpha \in G(\overline{\mathbb{Q}}).$$

$$(v) f^{(x, a, \sigma)} = f^{(a, \sigma)} \quad \text{if } f \in M_k(\overline{\mathbb{Q}}), \quad x = \begin{pmatrix} N_{\mathbb{F}'(a)} & \\ & N_{k^*/\mathbb{Q}}(a) \end{pmatrix}$$

$$(vi) A_k(\overline{\mathbb{Q}})^{(x, a, \sigma)} = A_{k^{\sigma}}(\overline{\mathbb{Q}}), \quad M_k(\overline{\mathbb{Q}})^{(x, a, \sigma)} = M_{k^{\sigma}}(\overline{\mathbb{Q}}).$$

5.  $\mathbb{Q}$  上の Galois action

これまででは、 $\sigma|_{k^*} = \text{id}_{k^*}$  の場合のみを扱ってきたが、 $\sigma|_{k^*} \neq \text{id}_{k^*}$  の場合に分かっていくことの概略を述べる。

今まで扱ってきた  $M_k$ 、つまり  $G(\mathbb{A}, \mathbb{F})$  についての重さ  $k$  の正則保型形式の空間を区別のため  $M_k(\mathbb{A}, \mathbb{F})$  と書く。このとき  $f \in M_k(\mathbb{A}, \mathbb{F})$  と、任意の  $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$  に対して、 $f^\sigma \in M_{k^\sigma}(\mathbb{A}, \mathbb{F}^\sigma)$  ( $\ell \in \mathbb{F}^\times$ ,  $\mathbb{F}^\sigma$  は  $\mathbb{F}$  に  $\sigma$  を作用させた CM-type で、 $\ell$  の虚部は  $\mathbb{F}^\sigma$  ですべて正になる) が存在し、それぞれの Fourier-Jacobi 展開を、

$$\begin{aligned} f(\mathfrak{z}) &= \sum_r g_r(w) \exp(2\pi\sqrt{-1} \sum_{v \in \mathfrak{a}} r_v z_v) & \mathfrak{z} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_v \\ w_v \end{pmatrix}_{v \in \mathfrak{a}} \in D(\mathbb{A}, \mathbb{F}) \\ f^\sigma(\mathfrak{z}) &= \sum_r \tilde{g}_r(\tilde{w}) \exp(2\pi\sqrt{-1} \sum_{v \in \mathfrak{a}} r_v \tilde{z}_v) & \tilde{\mathfrak{z}} = \begin{pmatrix} \tilde{z} \\ \tilde{w} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{z}_v \\ \tilde{w}_v \end{pmatrix}_{v \in \mathfrak{a}} \in D(k^\sigma, \mathbb{F}^\sigma) \end{aligned}$$

とすると、ある  $a \in k_A^\times$  について、

$$(\tilde{g}_r)_*(y^{\mathbb{F}^\sigma}) = \{ (g_r)_*((ay)^{\mathbb{F}}) \}^\sigma \quad \forall y \in k$$

が成り立ち、ということが分かった。なお、 $a, \ell$  は  $\mathbb{F}$  と  $\sigma$  により定まる。

## 参考文献

- [1] K. Miyake, Models of certain automorphic function fields, Acta Math. 126 (1971), 245-307.

- [2] G. Shimura, Theta functions with complex multiplication,  
Duke Math. J. 43(1976), 673-696
- [3] ———, The arithmetic of automorphic forms with  
respect to a unitary group, Ann. of Math. 107 (1978),  
569-605.
- [4] ———, Abelian varieties with complex multiplication  
and modular functions, Princeton University Press 46, 1998.